**О Т В Е Т Ы**

**на школьный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2014 год**

**10 класс**

1. Докажите, что  при любом натуральном *п* делится на 3.

***Решение.***



, т.к. первое слагаемое – это произведение трех последовательных натуральных чисел, т.е. оно кратно 3, а второе слагаемое содержит множитель 3, значит и вся сумма кратна 3.

1. Построить график функции .

***Решение.*** 



1. При каких значениях параметра *k* четыре точки *A(0; k), B(1; 2 – k), C(2; k), D(k; 7k – 6)* различны и лежат на графике квадратного трехчлена?

***Решение.***

Заметим, что точки *A* и *C* имеют разные абсциссы, но одинаковые ординаты. Следовательно, если через них проходит график квадратного трехчлена, то вершина параболы графика лежит ровно посередине между *A* и *C*, т.е. в точке (0 + 2)/2 = 1. Квадратный трехчлен с вершиной в точке 1 имеет вид . Напишем условия, что он проходит через точки *A, B, C, D*:

1. *A*: 
2. *B*: 
3. *C*: 
4. *D*: 

Подставим второе условие в первое: .

Подставим *p* = 2 – *k* и *a* = 2*k* – 2 в четвертое условие:

, при 

(корень *k* = 1 не подходит, в этом случае точки *B* и *D* совпадают).

Далее,  или *k* = 3.

***Ответ:*** −1; 3.

1. В трапеции *ABCD* длина основания *AD* равна , а длина основания *BC* равна. Угол ∠*A = 15°*, ∠*D = 30°*. Найдите длину боковой стороны *AB*.

***Решение.***

A

B

C

D

K

30°

15°

A

B

C

D

K

15°

30°

Проведем *BK* параллельно *CD*. Заметим *KD || BC, KB || DC*, следовательно, *KBCD* параллелограмм и *KD = BC* =**. *AD* – секущая параллельных прямых *BK* и *CD*, следовательно ∠*AKB =∠ADC* = 30°.

Далее найдем длину отрезка *AK = AD* – *KD* = . Боковую сторону *AB* теперь можно найти по теореме синусов для треугольника *ABK*: . При этом ∠*ABK* = 180° – ∠*AKB* – ∠*BKA* = 180° – 30°– 15° = 135°.

И *sin* 135° = . Теперь можно найти *AB*, она получается равной 1.

***Ответ:*** 1.

1. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 3, а в остатке 7. Если из суммы квадратов цифр этого числа вычесть произведение его цифр, то в результате получится данное двузначное число. Найти это число.

***Решение.***

Пусть *а* – цифра десятков, *b* – цифра единиц в числе, тогда число запишем как . Составим по условиям задачи систему уравнений 

Из первого уравнения следует, что . Так как *а* – цифра, то *b* делится на 7 без остатка и может принимать два значения: 0 или 7. В первом случае *a* = 1, а число 10 делится на 1 без остатка. Во втором случае *a* = 3, а число 37 является решением второго уравнения, то есть является и решением задачи.

***Ответ:*** 37.

1. Служившему воину дано вознаграждение за первую рану 1 копейка, за другую – 2 копейки, за третью – 4 копейки, за четвертую – 8 копеек и т.д. по исчислению нашлось, что воин получил всего вознаграждения 655 руб. 35 копеек. Спрашивается число его ран.

***Решение.***

1 + 2 + 4 + 8 + … + 2*n* = 65535 – это сумма геометрической прогрессии, где *а1* = 1, *а2* = 2, и т.д. Таким образом, *q* = 2. Формула суммы геометрической прогрессии 



***Ответ:*** 16.

1. Три подруги были в белом, красном и голубом платьях. Их туфли были так же трех цветов. Только у Тамары цвета платья и туфель совпадали. Валя была в белых туфлях. Ни платье, ни туфли Лиды не были красными. Определите цвет платья и туфель каждой из подруг.

***Решение.***

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Имя | Белое платье | Красное платье | Голубое платье | Туфли  |
| Тамара  | - | + | - | Красные  |
| Лида  | + | - |  | Голубые  |
| Валя  |  |  | + | Белые  |

***Ответ:*** у Тамары были красные туфли и платье, у Вали – белые туфли и голубое платье, у Лиды – белое платье и голубые туфли.